ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 класс

Вариант 1

Задание 1.

Пусть Ʊ_1 – скорость первого всадника (из А), Ʊ_2 – скорость второго всадника (из В). Пусть до встречи со вторым всадником 1 проедет путь –S_1, второй путь – S_2. Тогда по условиям задачи

$\frac{S_2}{\text{Ʊ}_1} = 27$ минут, $\frac{S_1}{\text{Ʊ}_2} = 12$ минут, $S_2 = 27\text{Ʊ}_1,\ S_1 = 12\text{Ʊ}_2$.

Также: $\frac{S_1}{\text{Ʊ}_1} = \frac{S_2}{\text{Ʊ}_2}$. Поэтому $\frac{12\text{Ʊ}_2}{\text{Ʊ}_1} = \frac{27\text{Ʊ}_1}{\text{Ʊ}_2} => 4\frac{\text{Ʊ}_2}{\text{Ʊ}_1} = 9\frac{\text{Ʊ}_1}{\text{Ʊ}_2}$,

$\frac{\text{Ʊ}_2}{\text{Ʊ}_1} = \frac{3}{2}$. Отсюда находим, что $\frac{12\text{Ʊ}_2+27\text{Ʊ}_1}{\text{Ʊ}_2} = 12 + 27 * \frac{2}{3}$ = 30 минут, а

тогда $\frac{12\text{Ʊ}_2+27\text{Ʊ}_1}{\text{Ʊ}_1} = 12\frac{\text{Ʊ}_2}{\text{Ʊ}_1} + 27 = 27 + 18 = 45$ минут.

Ответ: 30 минут и 45 минут

Задание 2.

Ответ: $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Задание 3.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 корни уравнения. По теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + {} + x_5 = 5$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 1$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом следует, что $1^5 = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5} \leq$

$\leq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4++x_5}{5} = 1$. А тогда из равенства средних получим, что все корни равны 1^5, поэтому $x^5 - 5x^4 + ax^3 + вx^2 + cx - 1 = (x-1)^5$. Отсюда по формуле бинома Ньютона находим ответ: а=10; в= - 10: с=5

Задание 4.

$$\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt{2+3+5+2\sqrt{2\cdot 3}+2\sqrt{2\cdot 5}+2\sqrt{3\ \ \cdot 5}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$ Так как

$\sqrt{2} < 1{,}42;\ \sqrt{3} < 1{,}74;\ \sqrt{5} < 2{,}24$, то

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} < 1{,}42+1{,}74+2{,}24 = 5{,}4.$ Следовательно число слева меньше числа справа.

Ответ: первое число (радикал) меньше второго.

Задание 5.

Группируя слагаемые, систему можно представить в виде: $\begin{cases} y - z - \frac{2}{x-z} = 3 \\ y + x - \frac{3}{z-1} = 9 \end{cases}.$

Так как по условию $x; y; z -$ целые числа, то из второго уравнения следует, что z=$\{0, -2, 2, 4\}$. Вычитаем из второго уравнения первое уравнение, получим: $x + z - \frac{3}{z-1} + \frac{2}{x-z} = 6$. Будем подставлять в это уравнение возможные значения z. При $z = 0$ $\quad x^2 - 3x + 2 = 0$, значит либо $x = 1$, либо $x = 2$. Отсюда при $x = 1$ $y = 5$, при $x = 2$ $y = 4$. Для других значений z система не будет иметь целых решений.

Ответ: (1;5;0), (2;4;0)

Задание 6.
Обозначим $\sin x = а$ $\cos x = в$, тогда: $а^3 + ав - 2а - 2а^2в + 4в = 0.$ Группируя слагаемые, получим $а^2(а - 2в) + а(в - 2) + 2в(2 - в) = 0.$ Отсюда $а^2(а - 2в) + (в - 2)(а - 2в) = 0, (а - 2в)(а^2 + в - 2) = 0.$ Следовательно, $(\sin x - 2\cos x)(\sin^2 x \cos x - 2) = 0.$ Из уравнения $\sin x - 2\cos x = 0$ получим $\mathrm{tg} x = 2$, $x = \mathrm{arctg}2 + k\pi$ $k \in Z$. Второе уравнение очевидно не имеет решений по свойству $\sin x$ и $\cos x$. Равенство $\sin^2 x = \cos x = 1$ невозможно.

Ответ: $\{\ \mathrm{arctg}2 + k\pi \quad k \in Z\ \}$

Задание 7.
ОДЗ:$x > 3, x \neq 4.$

Имеем: $\log_{x-3}|x-4| < \log_{x-3}(x-3)^2$. Тогда возможны два случая:
$\begin{cases} x - 4 < x^2 - 6x + 9 \\ x > 4 \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0 \\ x > 4 \end{cases} \gg x > 4$

$\begin{cases} x < 4 \\ x - 4 > x^2 - 6x + 9 \end{cases} <=> \begin{cases} x < 4 \\ x^2 - 5x + 5 > 0 \end{cases} \gg x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ с учетом ОДЗ получим ответ: $(x > 4) \cup (3; \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2})$

Задание 8.
Легко увидеть, что три прямые разбивают плоскость на 7 частей. Тогда 4 прямые могут разбить плоскость на 11 частей, так как четвертая прямая пересекает три данные прямые, делится точками пересечения на 4 части (каждая часть прямой разбивает каждую часть плоскости, через которую проходит (таких частей 4) еще на 2 части). Следовательно, число частей плоскости увеличится на 4, и будет $7 + 4 = 11$ частей.

Аналогично находим, что число m_5 частей, на которые могут разделить плоскость пять прямых, будет равно: $m_5 = m_4 + 5 = 16$, где m_4 – число разбиений плоскости 4 прямыми. Аналогично находим, что $m_6 = m_5 + 6 = 22$.

Ответ: {22}

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

Скорость велосипедиста при попутном ветре, согласно условию задачи, равна $\frac{1}{3}$ км/мин., при встречном ветре $\frac{1}{5}$ км/мин.. тогда собственная скорость велосипедиста равна полусумме двух указанных скоростей, а именно $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{5})=\frac{4}{15}=\frac{1}{3\frac{3}{4}}\frac{\text{км}}{\text{мин}}$. Отсюда получаем, что велосипедист в безветренную погоду проезжает 1 км за 3 минуты 45 секунд.

Ответ: 3 минуты 45 секунд.

Задание 2.

.$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = x^3+3\,x^2(y+z)+3x(y+z)^2+$ $+(y+z)^3-x^3-y^3-\ z^3=3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+$ $+z)^3-y^3-z^3=3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3zy^2+$ $+3yz^2+z^3-y^3-z^3=3(x^2(y+z)+xy^2+yxz+xz(y+z)+y+$ $+z(y+z)=3(y+z)(x^2+xy+xz+yz)=3(y+z)\big(x(x+y)+z(x+$ $+y)\big)=3(y+z)(x+y)(x+z)$

Ответ: $3(y+z)(x+y)(x+z)$

Задание 3.

По теореме Виета $x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4=4,\qquad x_1\cdot x_2\cdot\ x_3\cdot\ x_4=1,$ где x_j $-$ корни $i=1,\dots 4$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическим имеем: $1 = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \le 1$. Из равенства средних следует, что все корни этого уравнения равны 1. А тогда $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = (x-1)^4 =>$ $a = 6, \quad b = -4$

Ответ: $a = 6, \quad b = -4$

Задание 4.

$$\sqrt{15 + \sqrt{60} + \sqrt{84} + \sqrt{140}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{21} + 5 + 7 + 2\sqrt{35}} =$$

$= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$, так как $\sqrt{3} > 1{,}70$, $\sqrt{5} > 2{,}20$, $\sqrt{7} > 2{,}60$, а 1,70+2,20+2,60=6,50, то число слева (радикал) больше числа справа.

Ответ: первое число больше.

Задание 5.

Группируя слагаемые, систему можно записать в виде:

$\begin{cases} x - y + 3 = \frac{2}{x-z} \\ \frac{3x-2}{x-1} = \frac{z+y}{3} \end{cases} <==> \begin{cases} x - y + 3 = \frac{2}{x-z} \\ 3 + \frac{1}{x-1} = \frac{z+y}{3} \end{cases}$. Так как x,y,z целые числа, то из второго уравнения следует, что $x = 0$ или $x = 2$. При $x = 0$ имеем: $\begin{cases} 3 - y = -\frac{2}{z} \\ z + y = 6 \end{cases}$ Складывая эти уравнения, получим $z = 1, z = 2$, при $z = 1$ $y = 5$, при $z = 2$ $y = 4$. При $x = 2$ имеем $z^2 + 9z + 16 = 0 =>$ целых корней нет.

Ответ: (0;4;2), (0;5;1)

Задание 6.

Пусть $\sin x = a \quad \cos x =$ в, тогда $в^2 + а^2в - 2в - 4а^3 - 4ав + 8а = 0$. Группируя слагаемые, получим: $в(а^2 + в - 2) - 4а(а^2 + в - 2) = 0$. А тогда $(\sin^2 x + \cos x - 2)(\cos x - 4\sin x) = 0$. Отсюда: $\sin^2 x + \cos x - 2 = 0$ или

$\cos x - 4\sin x = 0$. Первое уравнение решений не имеет, так как равенства: $\sin^2 x = 1$, $\cos x = 1$ одновременно невозможны, поэтому $4\sin x = \cos x \Rightarrow\!\!\!>$

$\Rightarrow\!\!\!> \mathrm{tg} x = \frac{1}{4}, \mathrm{x} = \mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \pi k$

Ответ:$\{\ \mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \pi k \ \ k \in Z\}$

Задание 7.

ОДЗ $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2} \ \ x < 3$. Далее запишем,

$\log_{|1-2\mathrm{x}|}(3 - \mathrm{x}) \geq \log_{|1-2\mathrm{x}|}|1 - 2\mathrm{x}|$

Здесь возможны два случая: 1) $\begin{cases} |1 - 2x| > 1 \\ 3 - x \geq |1 - 2x| \end{cases} <=>$

$\begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \\ (3 - x)^2 \geq (1 - 2x)^2 \end{cases} <=> \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \\ 3x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases} => |-2 \leq x < 0|;\ 1 < x \leq {}^4\!/_3$.

Второй случай, когда $|1 - 2x| < 1$.

Тогда получаем: $\begin{cases} -1 < 1 - 2\mathrm{x} < 1 \\ 3x^2 + 2x - 8 > 0 \end{cases} => \begin{cases} 0 < \mathrm{x} < 1 \\ \mathrm{x} \leq -2; \mathrm{x} > \frac{4}{3} \end{cases} =>$ нет решений.

Ответ: $[-2; 0) \cup (1;\ {}^4\!/_3]$

Задание 8.

Две непараллельные прямые разбивают плоскость на 4 части. Три прямые разбивают плоскость на 7 частей. Четвертая прямая, пересекая три данные прямые, делится точками пересечения на 4 части. Каждая часть прямой разбивает каждую часть плоскости, через которую проходит (таких частей имеется 4) еще на 2 части. Таким образом, число частей плоскости увеличивается на 4. Всего окажется $7 + 4 = 11$ частей плоскости.

Ответ: $\{11\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 класс

Вариант 3

Задание 1.

Пусть по пути в одну сторону автобус поднимается в гору на участках одного типа суммарной длины S_1, а спускается с горы на участках другого типа длины S_2. Тогда по пути в обратную сторону он будет, наоборот, спускаться с горы на участках первого типа и подниматься в гору на участках второго типа. Поэтому на проезд туда и обратно автобус затратит в общей сложности количество часов, равное $\frac{S1}{30}+\frac{S2}{60}+\frac{S1}{30}+\frac{S2}{30}$ = $(S_1 + S_2)$ $(\frac{1}{30}+\frac{1}{60})$ = $(S_1 + S_2)$ * $\frac{1}{20}=2$. Т.е. длина пути $S_1 + S_2$ между селениями равна 40 км.

Ответ: 40.

Задание 2.

Пусть $x^2-y^2-x+3y-2=(x+y+a)(x-y+b)=x^2-y^2+(a+$ $+b)x+ba$. Отсюда $a+b=-1, b-a=3, ab=-2$. Отсюда находим, что $b=$ $1, \text{a}=-2$. Таким образом, $x^2-y^2-x+3y-2=(x+y-2)(x-y+1)$.

Ответ: $(x+y-2)(x-y+1)$

Задание 3.

Если $x_i(i=1,\dots 6)$ корни, то по т. Виета их сумма равна 6, а сумма $x_1x_2+x_1x_3+\cdots+\ x_5x_6=15$. Докажем, что если для чисел $b_1,\dots\ b_n$ сумма равна n, то сумма попарно различных произведений $\leq\frac{n(n-1)}{2}$, причем равенство достигается лишь тогда и только тогда, когда $b_1=b_2=\ \dots\ b_n=1$. В самом деле, имеем $2(b_1b_2+\cdots+b_{n-1}b_n)=(b_1+\cdots+b_n)^2-(b_1^2+\cdots+b_n^2)=n^2-$ $-(b_1^2+\cdots+b_n^2)$, тогда по неравенству Коши $(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)n\geq(b_1+$

$+b_2 + \cdots + b_n)^2$. Отсюда имеем $-(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \le -\frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots +$ $+b_n^2)$. Следовательно $n^2 - (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \le n^2 - \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2 =$

$= n^2 - n = n(n-1)$, т.е. утверждение верно. При $n = 6$, $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, значит все $x_i = 1$. А тогда: $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)^6$. Поэтому, раскрывая скобки по формуле Бинома Ньютона, получаем:

Ответ: $a = -20, b = 15, c = -6, d = 1$.

Задание 4.

$\sqrt{15 + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{42}} = \sqrt{2 + 6 + 7 + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{42}} =$ $= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{7})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$. С другой стороны, $\sqrt{2} > 1{,}40, \sqrt{6} >$

$> 2{,}40, \sqrt{7} > 2{,}60$. Следовательно $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{7} > 6{,}40$ поэтому первое число (слева) больше второго числа (справа).

Ответ: первое число больше.

Задание 5.

Преобразуя второе уравнение системы, получим:

$2y - 3 = (x - z)(y - 2)$, отсюда $2 + \frac{1}{y-2} = x - z$. Так как y - целое, то y = 1 и y = 3. При y = 1 получим $x = z$ +1; при y = 3, $x = z$ +3. Рассмотрим первый случай. Подставляя y = 1, $x = z$ +1 в первое управление системы, получим $z^2 - 4z - 5 = 0$.

Значит $z_1 = -1, z_2 = 5$. Поэтому $x_1 = 0, x_1 = 8$. Имеем два решения системы: (0, 1, -1) и (6, 1, 5). Во втором случае при $y = 3$ и $x = z + 3$ получаем уравнение

$z^2 - 6z - 5 = 0$. Это уравнение не имеет целых решений.

Ответ: (0, 1, -1) и (6, 1, 5).

Задание 6.

Обозначим $\sin x = a$, $\cos x = b$. Тогда получим уравнение: $2ab^3 - -2a^2b + 4ab^2 - 8ab - 2b^3 + 2ab - 4b^2 + 8b = 0$. Сокращая это уравнение на 2 и вынося за скобки общий множитель b, получим $(ab^2 - a^2 + 2ab - 4a + +a + 4 - b^2 - 2b)b = 0$. А тогда имеем: $(a(b^2 - a + 2b - 4) - (b^2 + 2b - a - -4))b = 0$. Отсюда: $b(b^2 + 2b - a - 4)(a - 1) = 0$. Поэтому получаем: $\mathrm{b} = \cos x = 0$, $a = \sin x = 1$ и $\cos^2 x + 2\cos x - \sin x - 4 = 0$. Поэтому имеем: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$. Последнее равенство будет, если $\cos 2x = 1, \sin x = -1$, что невозможно.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \; k \in z$.

Задание 7.

Находим ОДЗ $1 - x > 0, 1 - x \neq 1, 2x - 1 > 0 \; \Rightarrow \; {}^{1}/_{2} < x < 1$. Отсюда следует, что в области ОДЗ основание логарифма меньше единицы. Поэтому $\log_{1-x}(2x - 1) \geq \log_{1-x}(1 - x) \Rightarrow 2x - 1 \leq 1 - x$, т.е. $x \leq {}^{2}/_{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < x \leq {}^{2}/_{3}$.

Задание 8.

Две непараллельные прямые разбивают плоскость на четыре части. Если добавить еще одну прямую, то нетрудно видеть, что число разбиений плоскости будет равно $4 + 3 = 7$. Если провести еще одну прямую, то эта четвертая, пересекая три данные прямые делится точками пересечения на 4 части и, следовательно, число частей плоскости увеличивается на 4. Всего окажется $7 + 4 = 11$ частей плоскости. Теперь, если провести ещё одну прямую, то число разбиений плоскости m_5 пятью прямыми будет равно:

$$m_5 = m_4 + 5 = 16.$$

Ответ: 16.